

Soluciones de una Ecuación No Local Discreta y No Lineal de Schrödinger

Roberto Ben

Instituto del Desarrollo Humano
Universidad Nacional de General Sarmiento.
En colaboración con J. P. Borgna (UNSAM)
y P. Panayotaros (UNAM-México).



1 Introducción

- Ecuación Discreta No Lineal de Schrödinger (DNLS)
- Motivación física
- Modelo matemático - DNLS No Local

2 Soluciones tipo Breathers

- Regímenes y tipos de soluciones
- Soluciones numéricas - Métodos de Newton-Krylov

3 Análisis Espectral y Estabilidad

- Linealización en torno a breathers
- Espectro y Estabilidad: Resultados numéricos

Ecuación Discreta No Lineal de Schrödinger (DNLS)

DNLS (local):

$$\frac{\partial u_n}{\partial z} = \delta i \Delta u_n + i |u_n|^{2p} u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad z > 0,$$

$\Delta u_n := u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$, δ : constante de acoplamiento entre nodos vecinos.

Algunas aplicaciones:

- Propagación de la luz en medios ópticos.
- Dinámica de átomos en condensados de Bose-Einstein.
- Aplicaciones tecnológicas (computación cuántica, superconductores, superfluidos).
- Discretización de la ecuación no lineal de Schrödinger continua.

Pelinovksy et al. 2005, Carretero et al. 2006, Kevrekidis 2009 (The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation), etc.

Ecuación Discreta No Lineal de Schrödinger (DNLS)

DNLS (local):

$$\frac{\partial u_n}{\partial z} = \delta i \Delta u_n + i |u_n|^{2p} u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad z > 0,$$

$\Delta u_n := u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$, δ : constante de acoplamiento entre nodos vecinos.

Algunas aplicaciones:

- Propagación de la luz en medios ópticos.
- Dinámica de átomos en condensados de Bose-Einstein.
- Aplicaciones tecnológicas (computación cuántica, superconductores, superfluidos).
- Discretización de la ecuación no lineal de Schrödinger continua.

Pelinovksy et al. 2005, Carretero et al. 2006, Kevrekidis 2009 (The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation), etc.

Motivación física

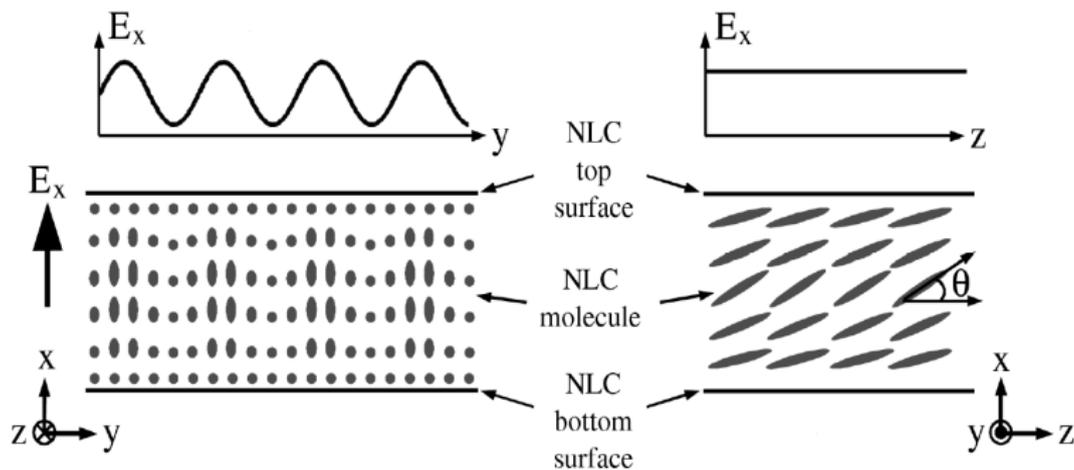


Figura: (Fratolocchi y Assanto 2005)

E_x : campo eléctrico periódico en y , constante en z , aplicado mediante una grilla de electrodos.

θ : ángulo de inclinación promedio de las moléculas de cristales líquidos nemáticos.

Ecuación discreta no local y no lineal de Schrödinger:

$$\frac{\partial u_n}{\partial z} = \delta i(\Delta u)_n + 2\gamma \tanh\left(\frac{\kappa}{2}\right) i \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 \right) u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad z > 0,$$

$$(\Delta u)_n := u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \quad \text{y} \quad \delta, \gamma, \kappa \text{ constantes reales, } \kappa > 0.$$

Cantidades conservadas:

- Masa o Potencia:

$$P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2.$$

- Estructura Hamiltoniana:

$$H = \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_{n+1} - u_n|^2 - \gamma \tanh\left(\frac{\kappa}{2}\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 |u_n|^2,$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial z} = -i \frac{\partial H}{\partial u_n^*}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ecuación discreta no local y no lineal de Schrödinger:

$$\frac{\partial u_n}{\partial z} = \delta i(\Delta u)_n + 2\gamma \tanh\left(\frac{\kappa}{2}\right) i \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 \right) u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad z > 0,$$

$$(\Delta u)_n := u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \quad \text{y} \quad \delta, \gamma, \kappa \text{ constantes reales, } \kappa > 0.$$

Cantidades conservadas:

- **Masa o Potencia:**

$$P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_n|^2.$$

- **Estructura Hamiltoniana:**

$$H = \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_{n+1} - u_n|^2 - \gamma \tanh\left(\frac{\kappa}{2}\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 |u_n|^2,$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial z} = -i \frac{\partial H}{\partial u_n^*}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Soluciones tipo Breathers

Ansatz: $u_n = e^{-i\omega z} A_n$, $\omega \in \mathbb{R}$, $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ independiente de z .

Ecuación estacionaria

$$\delta(\Delta A)_n + 2\gamma \tanh\left(\frac{\kappa}{2}\right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |A_m|^2 \right) A_n + \omega A_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

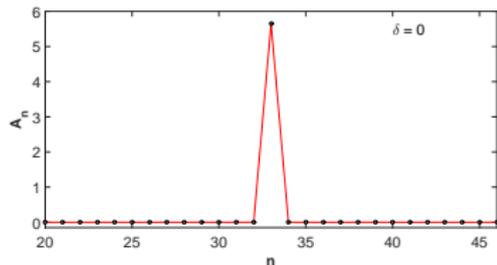
Un **Breather** $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ es una solución de este sistema.

Dos regímenes: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Caso Local - Schrödinger cúbica } (\kappa \rightarrow \infty), \\ \text{Caso No Local } (\kappa \text{ arbitrario}). \end{array} \right.$

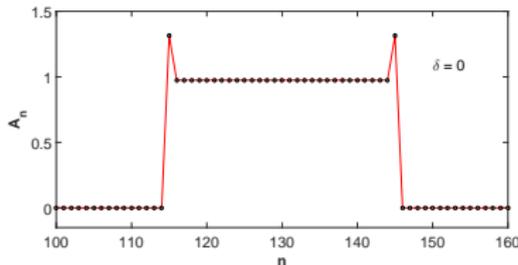
Tres tipos de **breathers**: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Un Pico,} \\ \text{Muchos Picos (Consecutivos, una cantidad finita),} \\ \text{Tipo Shelf (Infinitos picos consecutivos).} \end{array} \right.$

Soluciones en el límite anticontinuo ($\delta = 0$)

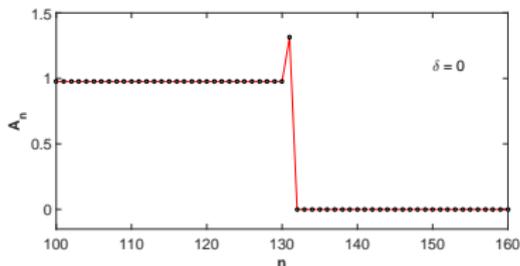
$$F_n(A, \omega, \delta) = \delta(\Delta A)_n + 2\gamma \tanh\left(\frac{\kappa}{2}\right) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |A_m|^2 \right) A_n + \omega A_n = 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



(a) Un pico.



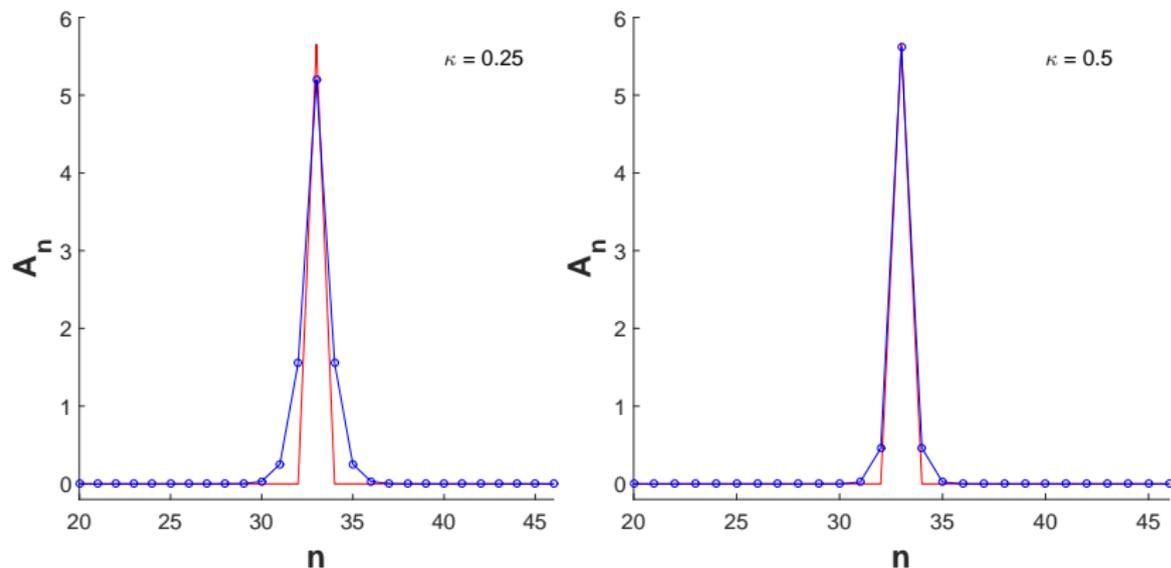
(b) Finitos picos consecutivos.



(c) Infinitos picos - Tipo Shelf.

Breathers de un pico

Soluciones continuadas a partir de una **Semilla** de un único pico central:



$$\gamma = -1, \delta = -0,5 \text{ (caso enfocante).}$$

Figura: Izquierda $\kappa = 0,25$ y Derecha $\kappa = 0,5$.

Frecuencias calculadas: $\omega = 6,979128408684841$ y $\omega = 14,674997205380388$ respect.

Potencia: $c = \|A\|_2^2 = 32$. $A_{33} = \sqrt{c}$. $N = 65$.

$$i\dot{u}_n = -\delta(\Delta u)_n - 2\gamma \tanh \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{-\kappa|m-n|} |u_m|^2 \right) u_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Equilibrios relativos con respecto a la acción de cambio de fase: $u(t) = e^{-i\omega t} v(t)$,

$$\dot{v}_n = -i \frac{\partial H_\omega}{\partial v_n^*}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{con} \quad H_\omega = H - \omega P.$$

Transformando a $Y = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ y linealizando en un pto. de eq. A:

$$\dot{z} = J\mathcal{H}z, \quad \text{con} \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2} \nabla^2 H_\omega(A),$$

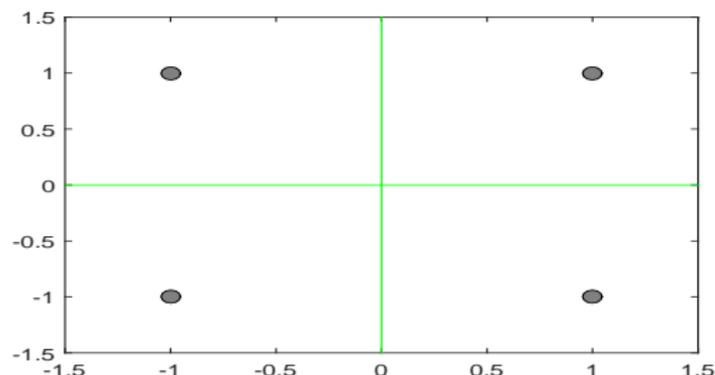
$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H} = \begin{bmatrix} L_+ & 0 \\ 0 & L_- \end{bmatrix},$$

I : Identidad de $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$, $L_- = -\omega I - \delta\Delta + 2\mathcal{A}$, $L_+ = -\omega I - \delta\Delta + 2\mathcal{A} + 4\mathcal{M}$.

Espectro puntual de $J\mathcal{H}$

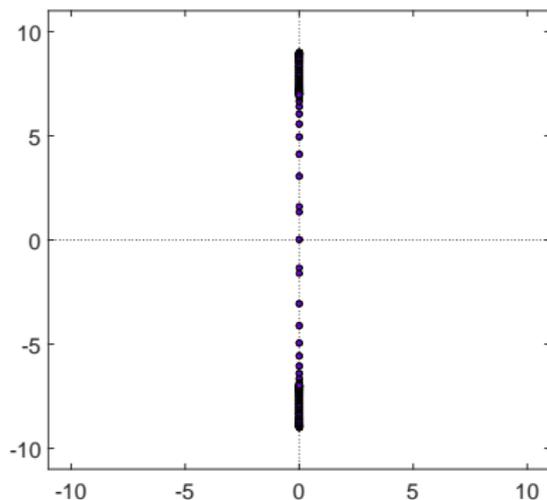
Teorema (Kapitula-Promislow (2013))

Sea $J\mathcal{H}$ la linealización en torno a un punto fijo. El espectro puntual $\sigma_{pt}(J\mathcal{H})$ es simétrico con respecto a los ejes real e imaginario. Esto es, si $\lambda \in \sigma_{pt}(J\mathcal{H})$ entonces $\{\pm\lambda, \pm\lambda^*\} \subset \sigma_{pt}(J\mathcal{H})$.

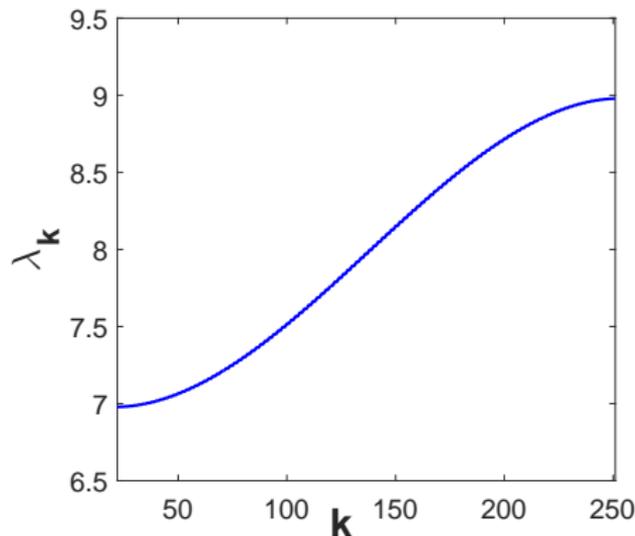


Resultados numéricos: un pico, $\kappa = 0,25$.

Espectro de $J\tilde{\mathcal{H}}$ (evaluado en el breather correspondiente a $\kappa = 0,25$, $\gamma = -1$, $\delta = -0,5$), dispersión de las frecuencias asociadas al espectro continuo de $J\mathcal{H}$,



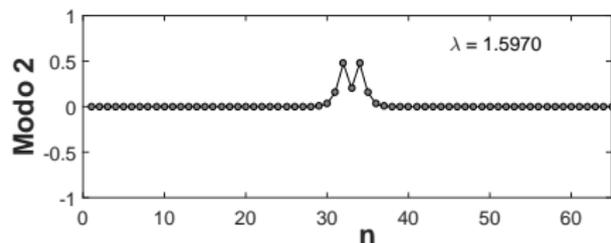
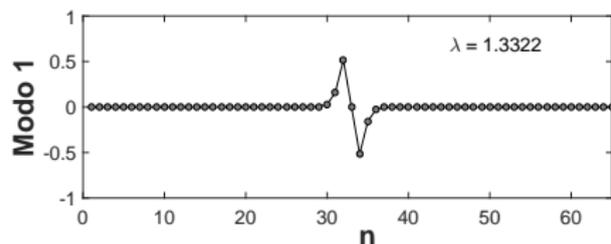
(a) Espectro de $J\tilde{\mathcal{H}}$. $\gamma = -1$, $\delta = -0,5$, $N = 65$.



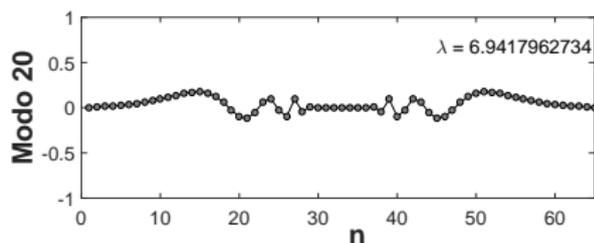
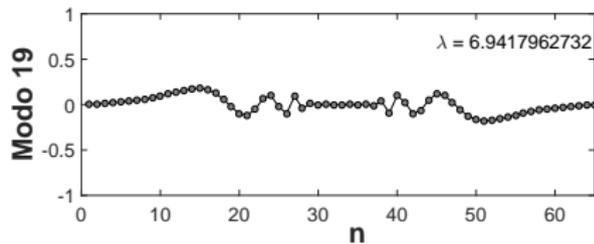
(b) Relación de dispersión entre λ_k y k . Calculado para $N = 251$.

Resultados numéricos: un pico, $\kappa = 0, 25$.

Parte real de los autovectores de $J\tilde{H}$ correspondientes a los autovalores de menor y mayor frecuencia: $\pm i\lambda_1$, $\pm i\lambda_2$, $\pm i\lambda_{19}$ y $\pm i\lambda_{20}$.



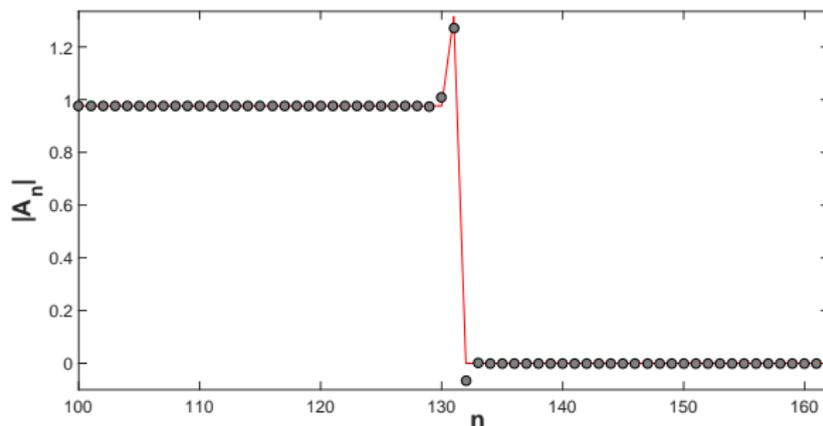
(a) $\pm i\lambda_1 = \pm i1,3322\dots$ (simetría impar) y $\pm i\lambda_2 = \pm i1,5969\dots$ (simetría par).



(b) $\pm i\lambda_{19} \approx \pm i6,9417962732$ (simetría impar) y $\pm i\lambda_{20} \approx \pm i6,9417962734$ (simetría par). Modos internos de frecuencia más alta.

Continuaciones numéricas basadas en adaptaciones de códigos de Kevrekidis-Carretero (Preprint) y de Kelley (2003) (método de Newton-Krylov)

Video: Método de Newton-Krylov



¡Gracias!

- BEN, CISNEROS AKE, MINZONI, PANAYOTAROS, *Localized solutions for a nonlocal discrete NLS equation*, Phys. Lett. A 379, 17051714 (2015).
- BEN, BORGNA, PANAYOTAROS, *Properties of some breather solutions of a nonlocal discrete NLS equation*, Communications in Mathematical Sciences, Vol. 15, N.8, 2143-2175, (2017).
- CARRETERO-GONZÁLEZ, TALLEY, CHONG, MALOMED, *Multistable solitons in the cubic-quintic discrete nonlinear Schrödinger equation*, Physica D 216, pp. 77-89, (2006).
- FRATALOCCHI, ASSANTO, *Discrete light localization in one-dimensional nonlinear lattices with arbitrary nonlocality*, Phys. Rev. E 72, 066608 (2005)
- KAPITULA, PROMISLOW, *Spectral and Dynamical Stability of Nonlinear Waves*, Springer (2013).
- KEVREKIDIS, *The Discrete Nonlinear Schrödinger Equation*, Springer (2009).
- MACKAY, AUBRY, *Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators*, Nonlinearity 7, 1623-1643 (1994).
- PELINOVSKY, KEVREKIDIS, FRANTZESKAKIS, *Stability of discrete solitons in nonlinear Schrödinger lattices*, Physica D 212, 1-19 (2005).